

# EL SUPUESTO DE NORMALIDAD EN EL CÁLCULO DEL VALOR EN RIESGO

David Juárez Luna\*  
José Carlos Ramírez Sánchez\*\*

## RESUMEN

El presente trabajo muestra que el cálculo del VaR<sup>1</sup> requiere de métodos alternativos al propuesto por *RiskMetrics*<sup>TM</sup> debido a que los rendimientos de las acciones del mercado bursátil mexicano no se distribuyen normalmente. En primer lugar se aplica la metodología sugerida por *RiskMetrics*<sup>TM</sup> para transformar las distribuciones originales en distribuciones normales estándar, encontrando que el modelo de EWMA<sup>2</sup> produce una mejor aproximación a la distribución normal que el modelo de volatilidad constante. Además, se analizan algunos modelos como el de mezcla de normales, el modelo

---

\* Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey-Campus Ciudad de México. Asistente General del Programa de Investigación en Regulación Económica. CIGEO, ITESM-CCM. E-mail: david.juarez@itesm.mx

\*\* Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey-Campus Ciudad de México. Director del Programa de Investigación en Regulación Económica. CIGEO, ITESM-CCM y profesor afiliado de la División de Economía del Centro de Investigación y Docencia Económicas, México. E-mail: josecarlos.ramirez@itesm.mx

Se agradecen los comentarios de un árbitro anónimo.

<sup>1</sup> Valor en Riesgo; VaR por sus siglas en inglés.

<sup>2</sup> Promedio móvil ponderado exponencialmente; EWMA, por sus siglas en inglés.

hiperbólico y el método de estimación de funciones, siendo éste último el que tiene mejores resultados para captar los valores extremos de las distribuciones. Finalmente, se elabora un cuadro comparativo de los diferentes métodos para calcular el VaR.

Palabras Claves: Valor en Riesgo, Distribución Normal, Sesgo, Curtosis.

Clasificación JEL: C40, G11

### ABSTRACT

This paper shows that it is necessary to use different methods from the one proposed by *RiskMetrics*<sup>TM</sup> to calculate VaR because mexican stock market returns are not normally distributed. Firstly original distributions got transformed following the *RiskMetrics*<sup>TM</sup> suggestion. The EWMA model gives a better approximation to the normal distribution than the constant volatility model does. In addition, some models such as mixed normal distributions, the hyperbolic model, and the estimating functions model are tested to calculate VaR. The last one is the best model to measure extreme values in the stock distributions. Finally, a comparison among the models is presented in a box.

Keywords: Value at Risk, Normal Distribution, Skewness, Kurtosis

JEL classification: C40, G11

## I. INTRODUCCIÓN

La globalización de los mercados financieros así como las espectaculares pérdidas ocurridas en los mercados internacionales de *derivados* durante la década pasada, han obligado a las empresas a reconocer la necesidad de mantener un buen control sobre el riesgo de sus operaciones. Como respuesta, las instituciones financieras han desarrollado una multitud de métodos para medir el riesgo que enfrentan las empresas. Entre estos métodos, el Valor en Riesgo (VaR), que se define como la máxima pérdida esperada de

una inversión en un horizonte de tiempo definido y dentro de un intervalo de confianza dado, es el más popular de todos. La razón de su popularidad obedece, en gran medida, a la publicación del documento técnico de *RiskMetrics™* por J. P. Morgan en 1994, en el que se hace una exposición completa de su sistema de medida del riesgo de mercado basada en la metodología del VaR.

La metodología descrita en el documento técnico de *RiskMetrics™* se basa en intervalos de confianza construidos bajo el supuesto de normalidad. No obstante, el supuesto es inconsistente con la evidencia empírica. Esto implica que, en la práctica, los eventos extremos son mucho más probables de ocurrir que los pronosticados por una distribución normal, por lo que las medidas de riesgo calculadas bajo el supuesto de normalidad pueden resultar inapropiadas para valorar el riesgo que enfrenta una empresa. Para resolver el problema de la falta de normalidad en las series de rendimientos y rehabilitar el cálculo del VaR, se han propuesto dos tipos de métodos: los paramétricos y los no paramétricos. Los primeros asumen distribuciones alternativas a la normal, mientras que los segundos hacen acopio de la teoría estándar de estadística de orden o de los métodos de simulación tipo Monte Carlo.

El presente trabajo muestra que el cálculo del VaR requiere de métodos alternativos, como los descritos en el párrafo anterior, debido a que los rendimientos de las acciones del mercado bursátil mexicano no se distribuyen normalmente. Para tal efecto, se toman los rendimientos de las acciones de doce empresas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV).

El trabajo se divide en cuatro secciones. En la primera se presenta la definición de riesgo financiero, así como los diferentes tipos y factores de riesgo que existen. En la segunda se ofrece la definición y los métodos de cálculo del VaR. En la tercera sección se somete a prueba el supuesto de normalidad y se discute la pertinencia de las correcciones propuestas por *RiskMetrics™*. En la cuarta se analizan algunos métodos alternativos para el cálculo de valor en riesgo en ausencia de normalidad. Por último, las conclusiones incorporan una breve discusión de los resultados principales



## II. EL RIESGO EN LAS INSTITUCIONES FINANCIERAS

El riesgo se define como la variación del valor de la cartera de inversión con respecto a su valor actual debido a movimientos en los factores de riesgo financieros, a cambios en las variables crediticias y de liquidez o a la presencia de problemas operativos. Esto significa que tanto las desviaciones positivas como negativas del valor del portafolio se consideran como riesgo. Generalmente los riesgos financieros se clasifican como: riesgo de mercado, riesgo de crédito, riesgo de liquidez, riesgo operativo y riesgo legal<sup>3</sup>.

El riesgo de mercado se refiere al cambio en los precios de los activos y pasivos financieros (o volatilidades) y se mide a través de las variaciones en las posiciones abiertas. Este tipo de riesgo incluye el *riesgo base*, presente cuando se cambia la relación entre los productos utilizados para cubrirse mutuamente; y el riesgo gamma, ocasionado por la no linealidad prevaleciente entre los subyacentes y el valor del derivado.

El riesgo de mercado puede ser causado por uno o varios de los siguientes factores, dependiendo del instrumento financiero de que se trate:

Riesgo asociado con variaciones en el nivel de las tasas de interés; cambios en la sobretasa de mercado de los instrumentos; riesgo resultado de cambios en los precios de las acciones. Un riesgo adicional de los instrumentos de renta fija se refiere a la posibilidad de que las curvas de rendimiento con base en las que se determina el rendimiento de los activos y pasivos de las instituciones financieras se muevan en direcciones y/o magnitudes diferentes.

El riesgo de crédito se presenta cuando las contrapartes están poco dispuestas a cumplir sus obligaciones contractuales. Su efecto se mide por el costo de la reposición de flujos de efectivo en caso de que la otra parte no cumpla. En términos generales, el riesgo de crédito también puede conducir a pérdidas cuando los deudores son clasificados duramente por las

---

<sup>3</sup> Jorion, P., (1997). "Value at Risk: the New Benchmark for Controlling Risk". Richard D. Irwin.



agencias crediticias, generando con ello una caída en el valor de mercado de sus obligaciones. Aquí también se incluye al *riesgo soberano*, que puede presentarse, por ejemplo, cuando los países imponen controles a las divisas extranjeras que imposibilitan a las contrapartes cumplir sus obligaciones. Mientras que el riesgo de incumplimiento es, generalmente, específico a una empresa, el riesgo soberano involucra a un país. Otra forma que toma el riesgo de crédito se presenta cuando una contraparte decide anular el contrato después de que una de las partes ha realizado el pago previamente.

El riesgo de liquidez cobra dos formas: *liquidez mercado/producto* y *flujo de efectivo/financiamiento*. El primer tipo de riesgo existe cuando una transacción no puede ser efectuada a los precios prevalecientes debido a una baja operatividad del mercado. Puede administrarse fijando límites en ciertos mercados o productos y a través de la diversificación. El segundo tipo de riesgo se refiere a la incapacidad de conseguir obligaciones de flujos de efectivo necesarios, lo cual puede forzar a una liquidación anticipada transformando, en consecuencia, las pérdidas en “papel” en pérdidas realizadas. La liquidez también está relacionada con el horizonte temporal de las inversiones. Las condiciones de mercado pueden impedir la liquidación inmediata de una inversión.

El riesgo operativo se refiere a las pérdidas potenciales resultantes de sistemas inadecuados, fallas administrativas, controles defectuosos, fraude o error humano. Incluyen: a) al *riesgo de ejecución* o riesgo derivado de la falla en la ejecución de las operaciones que conduce, generalmente, a retrasos o penalizaciones costosas; b) *riesgo por fraudes* resultante de la falsificación intencional de información; c) *riesgo tecnológico*, derivado de la necesidad de proteger a los sistemas de acceso no autorizado y de la interferencia; y d) riesgos relacionados con las fallas de sistemas o pérdidas ocasionadas por desastres naturales.

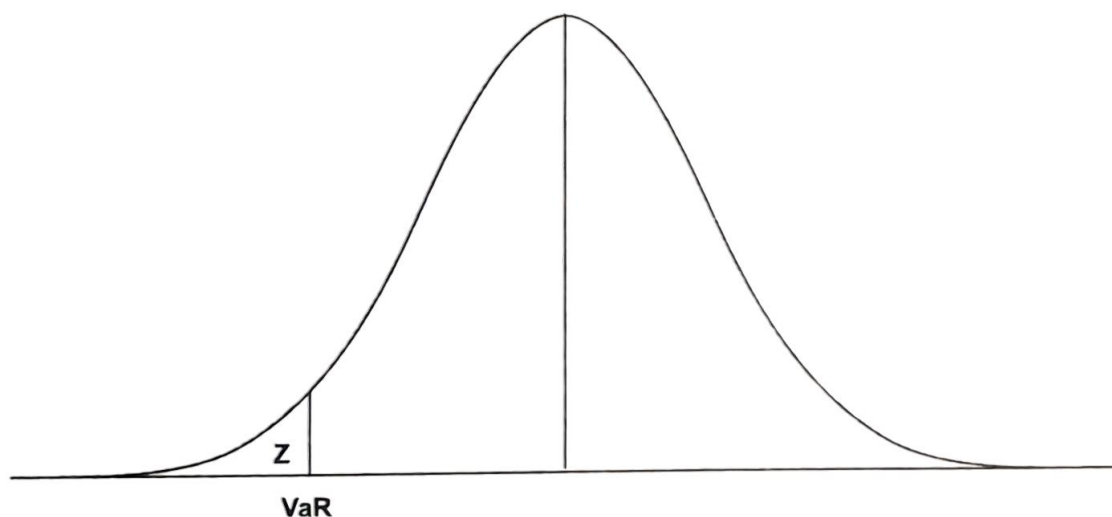
Finalmente, el riesgo legal se presenta cuando una contraparte no tiene la autoridad legal para realizar una transacción y, aunque se le relaciona directamente con el riesgo de crédito, también incluye el riesgo regulatorio, riesgo que se presenta cuando existen violaciones a las regulaciones guber-

namentales, como la manipulación del mercado o la operación con información privilegiada.

### III. VALOR EN RIESGO (VaR)

El riesgo de capital, y concretamente el VaR, se define como la pérdida máxima que una institución financiera podría observar –por una determinada posición o cartera de inversión, que se supone constante durante el periodo de inversión– en caso de presentarse un cambio en los factores de riesgo a un horizonte de inversión y un nivel de probabilidad dados. En términos algebraicos, si se supone que “ $x$ ” es una variable aleatoria que representa las pérdidas o ganancias en una fecha futura “ $T$ ” y “ $Z$ ” es la probabilidad porcentual, el VaR se define como  $\text{Prob}(x_T < VaR) = Z$  o el valor extremo de la cola izquierda de una distribución de probabilidad normal, tal como lo ilustra la figura 1.

Figura 1. Representación gráfica del concepto de Valor en Riesgo (VaR)



De acuerdo con la definición anterior, la estimación del VaR involucra los siguientes cuatro elementos:

- i. *Grado de sensibilidad del valor de la cartera de inversión ante cambios en los factores de riesgo.* Para estimar el VaR se requiere determinar un conjunto de factores de riesgo alternativos que, comparados con los niveles de riesgo vigentes, permitan estimar las pérdidas o ganancias de un portafolio de inversión o de crédito. Sin embargo, la relación entre los factores de riesgo y el cambio en el valor del portafolio puede tomar diferentes formas. La elección del modelo de VaR apropiado dependerá del tipo de relación que hay entre los cambios en los factores de riesgo de los instrumentos que conforman la cartera de inversión y el cambio en el valor del portafolio.
- ii. *Forma de la distribución de probabilidad del cambio en los factores de riesgo.* Para determinar el tamaño y la probabilidad de que se presenten movimientos adversos en los factores de riesgo, es preciso conocer antes la distribución de frecuencias de sus cambios. Como se verá más adelante, en la práctica, la mayoría de los modelos que se utilizan para estimar el riesgo del capital suponen que las distribuciones son normales o lognormales. En virtud de que la estimación del VaR se concentra en las colas de la distribución, una mala estimación o supuesto sobre la forma de la misma puede traducirse en cálculos incorrectos del valor en riesgo.
- iii. *Horizonte de inversión.* Es necesario determinar el periodo en el que se supone se mantendrá el nivel de riesgo en las instituciones financieras. Donde existe una relación directa entre el horizonte de inversión y el VaR el riesgo será mayor, en la medida que un portafolio se mantenga por más tiempo.
- iv. *Nivel de confianza.* Esto implica determinar el rango de pérdidas máximas que un inversionista podría tolerar en un escenario probabilístico. Por ejemplo, si un intermediario determina un nivel de confianza de 95%, significa que dicho intermediario estará dispuesto a aceptar que en sólo cinco de cada cien casos las pérdidas observadas serán superiores a las máximas estimadas. Cabe mencionar que, en la estimación interna del VaR,



la mayoría de las instituciones financieras considera un nivel de confianza de 97.5%; otras instituciones como J. P. Morgan<sup>4</sup> o el Comité de Basilea,<sup>5</sup> recomiendan niveles del 95% y del 99%, respectivamente.

La sencillez para estimar el riesgo de capital es uno de los factores que más ha contribuido a la aceptación del VAR entre los intermediarios financieros y los reguladores. Sin embargo, también existen otras ventajas que resulta conveniente comentar: la estimación está expresada en pesos, lo que permite construir portafolios de referencia. La metodología de valor en riesgo se puede aplicar a todas las posiciones de riesgo o carteras de inversión y a todos los niveles de una institución financiera, tales como fondos de pensiones, bancos al menudeo, aseguradoras, etc. El riesgo del portafolio está directamente relacionado con el comportamiento de las variables de mercado, como las tasas de interés, el tipo de cambio, los precios de los activos financieros o las tasas de incumplimiento. Eso permite entender la naturaleza de los riesgos y, por ende, la manera de controlarlos (Payant, 1996). Los directivos de las instituciones financieras pueden entender e interpretar fácilmente sus riesgos mediante el VaR sin necesidad de hacer cálculos complicados. Los reguladores pueden forzar la implementación de este sistema dado que pueden establecer requerimientos de adecuaciones de capital basados en el VaR del banco. Es decir, el procedimiento permite asignar el capital a las áreas de negocios en función de los rendimientos esperados y del nivel de riesgo que se debe soportar para alcanzarlo. En otras palabras, el riesgo de capital es equivalente al capital económico que soporta la operación de una unidad de riesgo.

Como resultado de estas ventajas y como consecuencia de los quebrantos observados por las instituciones financieras al tomar riesgos de mercado y de crédito excesivos, en los Estados Unidos las agencias calificadoras tales como Moody's y Standard and Poor's (S&P), Financial Accounting Standards Board y la Securities and Exchange Commission, han anunciado la aceptación del VaR.

---

<sup>4</sup> J. P. Morgan (1996).

<sup>5</sup> Comité de Basilea (1996).

Además, el Comité de Basilea adoptó en Diciembre de 1997 la metodología del VaR para determinar los requerimientos de capital de las instituciones financieras por concepto del riesgo de mercado.

### III.1 CÁLCULO FORMAL DEL VaR

El VaR se puede calcular de dos maneras: considerando la distribución empírica actual o aproximando la distribución por una curva normal. Hecha una decisión al respecto de estas dos alternativas, el primer paso consiste en seleccionar el tamaño del horizonte y el nivel de confianza. Si los VaR's resultantes son usados directamente para la elección de un respaldo (amortiguador) de capital, entonces la elección del nivel de confianza es crucial. Esta elección debe reflejar el grado de aversión al riesgo de la compañía y el costo de una pérdida ocasionada por exceder el VaR, pues valores altos de ambas variables suponen un gran monto de capital que debe ser usado para cubrir posibles pérdidas y, por lo tanto, un nivel de confianza más alto.

En las distribuciones empíricas, para calcular el VaR de un portafolio se define  $W_0$  como la inversión inicial y  $R$  como su tasa de rendimiento. El valor del portafolio al final del horizonte de planeación es  $W = W_0(1 + R)$ , mientras que la media y la volatilidad de  $R$  son  $\mu$  y  $\sigma$  respectivamente. Definamos ahora el valor más bajo del portafolio al nivel de confianza "c" como  $W^* = W_0(1 + R^*)$ . El VaR es entonces definido como la pérdida en pesos relativa a la media o, formalmente,

$$VaR(media) = E(W) - W^* = -W_0(R^* - \mu) \quad (1)$$

Algunas veces el VaR es definido como la pérdida absoluta en dólares; esto es, relacionada a cero o sin referencia al valor esperado,

$$VaR(cero) = W - W^* = -W_0 R^* \quad (2)$$



En ambos casos, encontrar el VaR equivale a verificar el valor mínimo del portafolio  $W^*$  o el valor de  $R^*$ .

En su forma más general, el VaR puede derivarse de la distribución de probabilidad del valor futuro del portafolio  $f(w)$ . De esta manera, si se desea encontrar el peor  $W^*$  tal que la probabilidad de exceder este valor es “c”, entonces:

$$c = \int_{W^*}^{\infty} f(w)dw \quad (3)$$

o tal que la probabilidad de un valor inferior a  $W^*$ ,  $p = P(w \leq W^*)$ , sea  $1-c$ :

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw = P(w \leq W^*) = p \quad (4)$$

En otras palabras, el área que va de  $-\infty$  a  $W^*$  debe sumar  $p=1-c$ . El número  $W^*$  es denominado el cuantil muestral de la distribución. Este método es válido para cualquier distribución, discreta o continua, delgada o extendida.

Por su parte, en las distribuciones paramétricas, la cuantificación del VaR puede simplificarse considerablemente si se supone que la distribución es normal. Cuando este es el caso, el VaR puede derivarse directamente de la desviación estándar del portafolio utilizando un factor multiplicativo que depende del nivel de confianza. Este enfoque es, algunas veces, denominado paramétrico debido a que implica la estimación de un parámetro y la desviación estándar, en lugar de la simple lectura del cuantil fuera de la distribución empírica. El procedimiento requiere, primero, traducir la distribución general  $f(w)$  en una distribución normal estándar  $\Phi(\varepsilon)$ , donde  $\varepsilon$  tiene como media cero y como desviación estándar la unidad. En seguida hay que asociar a  $W^*$  con el rendimiento crítico  $R^*$  tal que  $W^* = W_0(1 + R^*)$ . Generalmente  $R^*$  es negativo y puede también escribirse como  $-R^*$ . Posteriormente, también se puede asociar  $R^*$  con una desviación normal estándar  $\alpha > 0$  estableciendo



$$-\alpha = \frac{-|R^*| - \mu}{\sigma} \quad (5)$$

lo cual implica que:

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw = \int_{-\infty}^{-|R^*|} f(r)dr = \int_{-\infty}^{-\alpha} \Phi(\varepsilon)d\varepsilon \quad (6)$$

De este modo, encontrar el VaR significa calcular la desviación comprendida en el área izquierda que es igual a  $1-c$ . Esto es posible si se consideran las tablas de la función de distribución acumulativa, normal y estándar que muestran el área a la izquierda de una variable normal estándar con valor igual a  $d$ :

$$N(d) = \int_{-\infty}^d \Phi(\varepsilon)d\varepsilon \quad (7)$$

Para encontrar el VaR de una variable normal estándar primero se selecciona el nivel de confianza,  $\alpha$ , correspondiente; posteriormente se obtiene el rendimiento crítico  $R^*$  y el VaR. De la ecuación (5) el rendimiento crítico es

$$R^* = -\alpha\sigma + \mu \quad (8)$$

Para más generalidad, asumamos ahora que los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  están expresados en una base anual. El intervalo de tiempo considerado es  $\Delta t$  medido en años. Sustituyendo en (1), encontramos que el VaR por debajo de la media se define como

$$VaR(media) = -W_0(R^* - \mu) = W_0\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} \quad (9)$$

que no es otra cosa más que un múltiplo de la desviación estándar de la distribución, multiplicado por un factor de ajuste que está directamente relacionado con el nivel de confianza.

Cuando el VaR se define como una pérdida absoluta en dólares se enuncia como:

$$VaR(cero) = -W_0 R^* = W_0 (\alpha \sigma \sqrt{\Delta t} - \mu \Delta t) \quad (10)$$

con  $\Delta t$  expresado en años.

Es particularmente fácil trabajar con la distribución normal, dado que ésta representa adecuadamente muchas distribuciones empíricas. Esto es especialmente verdadero para portafolios grandes y bien diversificados, pero no es válido para portafolios con pesados componentes de opciones y exposición a un pequeño número de riesgos financieros.

### III.2 APROXIMACIONES PARA CALCULAR EL VaR

Hay varias alternativas para calcular el VaR de un portafolio. Una aproximación popular que usa *Riskmetrics* consiste en asumir un modelo en el que los cambios de las variables de mercado (precios de acciones, precio de los bonos cupón cero, tipo de cambio, precio de las mercancías, etc.) tienen una distribución normal multivariada. El valor de la media en cada variable se asume que es cero.

Asumiendo un modelo lineal, los instrumentos en el portafolio son dependientes de  $n$  variables de mercado; el VaR puede ser calculado analíticamente cuando se usa este modelo. El cambio en pesos del valor del portafolio en un día,  $\Delta P$ , tiene la forma:

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n a_i \Delta x_i \quad (11)$$

donde  $\Delta x_i$  es el cambio proporcional en el valor de la  $i$ -ésima variable de mercado durante un día y las  $a_i$  son constantes ( $1 \leq i \leq n$ ). La distribución de probabilidad del valor del portafolio al final de un día es normal, con media cero y desviación estándar  $\sigma_p$  donde

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} a_i a_j \sigma_i \sigma_j \quad (12)$$

La variable  $\sigma_i$  es la volatilidad diaria de la  $i$ -ésima variable de mercado y  $\rho_{ij}$  es la correlación entre  $\Delta x_i$  y  $\Delta x_j$ . El VaR, para cualquier nivel de confianza y cualquier horizonte de tiempo, puede calcularse fácilmente con  $\sigma_p$ . Por ejemplo, el VaR con un nivel de confianza de 99% y un horizonte de  $N$  días es  $2.33\sigma_p\sqrt{N}$ . Es importante destacar que, cuando el portafolio incluye instrumentos que no son linealmente dependientes de las variables de mercado, no hay una aproximación exacta para calcular el VaR.

Cuando el portafolio incluye instrumentos que no son linealmente dependientes de las variables de mercado, se emplea la simulación Monte Carlo, que permite generar la distribución de probabilidad de  $\Delta P$ .<sup>6</sup>

El método de simulación Monte Carlo provee una importante herramienta para el cálculo del VaR. Desafortunadamente este método puede consumir mucho tiempo debido a que el portafolio completo se debe reevaluar en cada ensayo de simulación.

Cuando el cálculo del VaR emplea un modelo cuadrático se aproxima la relación entre  $\Delta P$  y los  $\Delta x_i$ 's usando los primeros dos términos de una expansión en series de Taylor como la siguiente:

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j \quad (13)$$

Esta expresión puede ser usada para calcular los momentos de  $\Delta P$  de manera analítica. Alternativamente se puede usar una simulación Monte Carlo para calcular  $\Delta P$  directamente de la ecuación (13).

Finalmente, algunos ejercicios recurren a la simulación histórica para subsanar las desventajas de las aproximaciones propuestas. En la práctica, las distribuciones de los cambios diarios de muchas variables de mercado tienen

<sup>6</sup> Hull, J., (2000), *Options, Futures, and Other Derivatives*, Fourth Edition, Prentice Hall.



colas más gordas que las de la distribución normal. Esto ha llevado a algunas compañías a basar el cálculo del VaR en el método de la simulación histórica. El primer paso consiste en crear una base de datos compuesta por los movimientos diarios de todas las variables de mercado observadas durante algunos años. En la primera simulación se asume que los cambios porcentuales en las variables de mercado son los mismos que los observados en el primer día que cubre la base de datos; en la segunda simulación, se asume que los cambios porcentuales son los mismos a los observados en el segundo día y así sucesivamente. El cambio en el valor del portafolio,  $\Delta P$ , es entonces calculado para cada simulación, considerando al VaR como el percentil apropiado de la distribución de probabilidad de  $\Delta P$ . El valor del portafolio puede ser obtenido por dos métodos: revaluando el portafolio o usando la expansión en series de Taylor.

El método de simulación histórica tiene la ventaja de reflejar exactamente la distribución de probabilidad histórica de las variables de mercado. Sin embargo, el número de simulaciones en el método de simulación histórica se limita al número de días disponibles en la base de datos, por lo que es difícil hacer un análisis de sensibilidad. No pueden ser usados los esquemas de volatilidad actualizada. También, es difícil tratar variables de las cuales no existen datos o son poco disponibles.

#### IV. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL Y EL VAR

Cuando se usa la distribución de probabilidad normal al calcular el VaR basta saber el comportamiento de su media y de su desviación estándar para explicar las características de la distribución de los cambios en los factores de riesgo. La justificación detrás del supuesto de normalidad se basa en el principio de que, conforme se incrementa el número de observaciones, los parámetros de las distribuciones de probabilidad empíricas convergerán a los de una normal.<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup> El teorema del límite central demuestra esta característica. Mood, Graybill y Boes (1974).

En concreto, *RiskMetrics*<sup>TM</sup> considera que los rendimientos siguen una distribución normal condicionada. Supone que la serie de rendimientos es  $r_t$  y las de sus volatilidades están dadas por  $\sigma_t, t = 1, 2, \dots, n$ . La variable  $r_t$  no se distribuye como una normal, pero el cociente del rendimiento entre la volatilidad,  $r_t / \sigma_t$ , sigue una distribución normal estándar. Esta aproximación tiene las siguientes ventajas:

- i. La serie de  $r_t$  tiene colas más gordas que la serie descrita por  $r_t / \sigma_t$ , y
- ii. El modelo explícito de las series de las volatilidades captura la variación en el tiempo de la volatilidad que es común observar en los mercados financieros reales.

En resumen, *RiskMetrics*<sup>TM</sup> supone que si bien la serie original de los rendimientos no se distribuye normalmente, la serie transformada si lo hace. La

transformación requerida supone que:  $f(r_t) = \frac{r_t}{\sigma_t}$

Algunas herramientas computacionales que se emplean para verificar la normalidad de las distribuciones obtienen estimadores muestrales de los dos parámetros que describen una distribución normal. Para un conjunto de rendimientos,  $r_t$ , donde  $t = 1, 2, \dots, T$ , obtenemos estimadores de la media no condicional  $\bar{r}$ , y de la desviación estándar,  $\hat{\sigma}$ , vía los siguientes estimadores:

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}$$

Muchas pruebas de normalidad se enfocan en medir el sesgo y la curtosis. El sesgo caracteriza la asimetría de una distribución alrededor de su media. Un sesgo positivo indica una cola asimétrica que se extiende hacia los valores positivos. Un sesgo negativo implica una asimetría hacia los valores negativos. Una medida simple del sesgo, el coeficiente de sesgo o simplemente el sesgo,  $\hat{\gamma}_1$ , está dado por

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left( \frac{r_i - \bar{r}}{\hat{\sigma}} \right)^3$$

La distribución normal tiene un sesgo de cero, por lo que valores de sesgo significativamente diferentes de cero nos indican ausencia de normalidad. La curtosis indica qué tan picuda o plana es una distribución empírica comparada con una normal. Para medir la curtosis se emplea el coeficiente de curtosis,  $\hat{\kappa}$  dado por

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left( \frac{r_i - \bar{r}}{\hat{\sigma}} \right)^4$$

La curtosis para una distribución normal estándar es 3. Alternativamente se utiliza el excedente de la curtosis en lugar del coeficiente de curtosis. El excedente de curtosis se define como el coeficiente de curtosis menos tres.

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left( \frac{r_i - \bar{r}}{\hat{\sigma}} \right)^4 - 3$$

La distribución normal estándar tiene un excedente de curtosis de 0, por lo tanto, distribuciones que tienen un excedente de curtosis mayor que cero frecuentemente tienen colas gordas.

## V. EVIDENCIA EMPÍRICA

Para ilustrar el problema de no normalidad en las variables de mercado examinaremos, a continuación, el comportamiento de los rendimientos de las acciones de las siguientes doce empresas: Alfa (ALFAA), Apasco (APASCO), Grupo



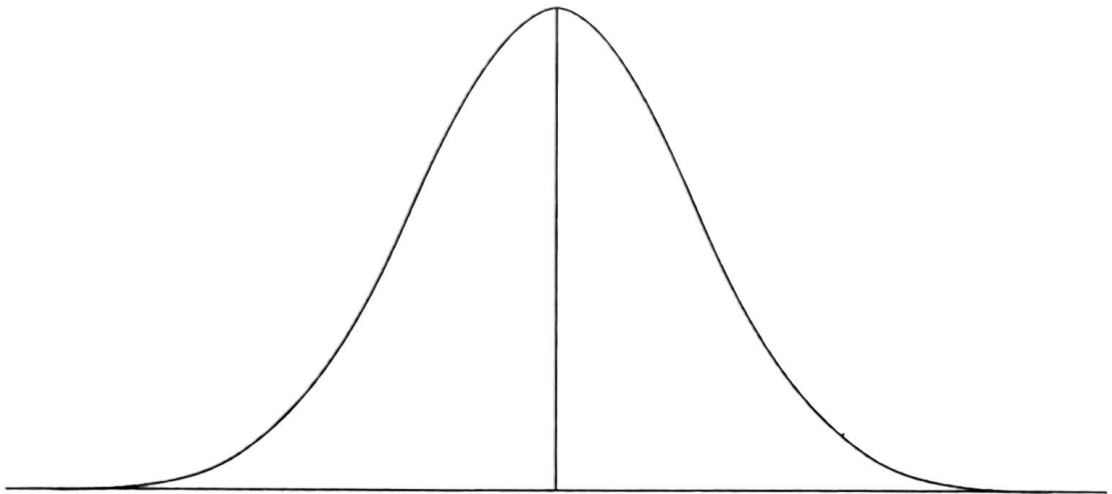
Bimbo (BIMBOA), Cemex (CEMEXCPO), Fomento Económico Mexicano (FEMSAUBD), Grupo Financiero BBVA Bancomer (GFBBB), Grupo Modelo (GMODELOC), Kimberly Clark de México (KIMBERA), Carso Global Telecom (TELECOMA1), Teléfonos de México (TELMEXL), TV Azteca (TVAZTCACPO), Cifra (WALMEXC). Los datos corresponden a observaciones diarias comprendidas entre el 2 de Enero de 1998 y el 17 de Septiembre de

2003. Los rendimientos se calcularon de la forma habitual:  $r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$ , donde

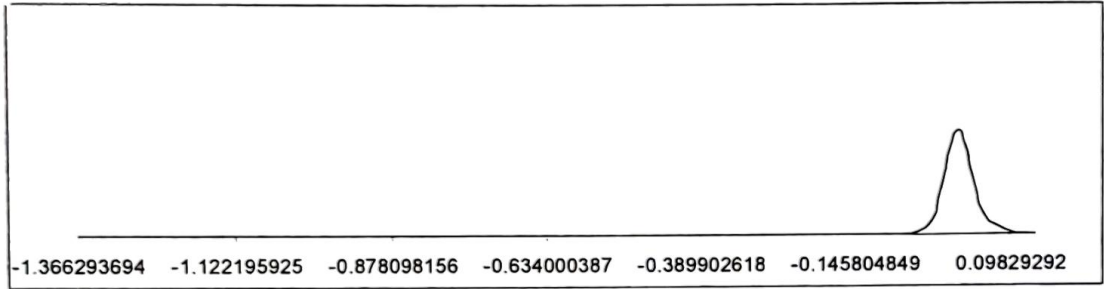
$r_t$  es el rendimiento en el tiempo  $t$  de un activo diario, y  $P_t$  es el precio del activo al costo de cada día.

Al comparar las distribuciones de rendimientos de algunas acciones con la distribución estándar (Figura 2) uno observa formas muy diferentes entre ellas. Por ejemplo, para el caso de la acción del grupo Modelo (ver Gráfica 1) es obvio que sus distribuciones de rendimientos poco tienen que ver con la forma acampanada de la figura 2.

Figura 2. Normal Estándar



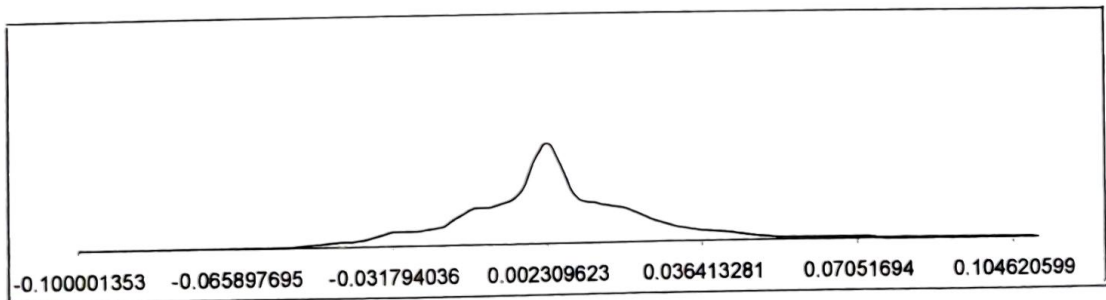
Gráfica 1. Distribución de los rendimientos de la acción de Grupo Modelo



De acuerdo con la gráfica 1, los rendimientos de esta acción tienen un marcado sesgo hacia la izquierda, pues en ese lado de la media se encuentran más datos que los que se encuentran a su lado derecho. La distribución empírica es, de hecho, muy puntiaguda debido a que concentra un gran número de observaciones alrededor de la media. El valor del sesgo y del exceso de curtosis para esta distribución es de  $-22.86$  y  $731.05$ , respectivamente, mismos que distan mucho de los valores correspondientes a una distribución normal estándar.

En la gráfica 2 se exhiben los rendimientos de la acción de Apasco, cuya distribución es más simétrica que la del Grupo Modelo debido a que el número de datos que se encuentra a ambos lados de su media son muy similares. No obstante, su distribución dista de parecerse a una distribución normal estándar, pues al calcular sus valores de sesgo y excedente de curtosis ( $0.22$  y  $2.35$  respectivamente), nos damos cuenta de que se encuentran alejados de los valores correspondientes a una normal.

Gráfica 2. Distribución de los rendimientos de la acción de Apasco



Para generalizar los resultados, presentamos en la tabla 1 una comparación entre la distribución normal y las distribuciones empíricas de los rendimientos de las doce acciones. La comparación incluye el porcentaje de datos que son mayores al valor absoluto de una, dos y hasta seis desviaciones estándar con respecto a la distribución normal estándar.

Tabla 1. Comparación entre la distribución normal y las distribuciones empíricas

	ALFA A	APASC O	BIMBO A	CEME XCPO	FEMSA UBD	GFBBB	GMODE LOC	KIMBE RA	TELEC OMA1	TELME XL
>1 DE	24.76	25.31	7.41	23.43	1.12	20.21	6.15	23.01	7.62	13.71
>2 DE	5.03	5.52	0.70	4.97	0.28	4.48	0.56	5.94	0.84	1.82
>3 DE	1.47	1.47	0.21	1.33	0.21	1.68	0.14	1.54	0.21	0.49
>4 DE	0.42	0.35	0.07	0.56	0.14	0.77	0.07	0.56	0.14	0.21
>5 DE	0.14	0.00	0.07	0.35	0.14	0.35	0.07	0.28	0.14	0.14
>6 DE	0.14	0.00	0.07	0.35	0.14	0.35	0.07	0.28	0.14	0.14
Sesgo	0.53	0.22	-22.36	-0.10	-11.06	0.90	-22.87	-0.03	-17.83	-9.38
Excedente de Curtosis	4.88	2.35	710.18	4.86	621.43	9.59	731.06	4.12	502.48	187.11

	TVAZT CACP O	WAL MEXC	Prome dio	Normal Est
>1 DE	11.61	24.97	15.78	31.73
>2 DE	1.68	5.45	3.11	4.55
>3 DE	0.35	1.33	0.87	0.27
>4 DE	0.07	0.35	0.31	0.01
>5 DE	0.07	0.07	0.15	0.00
>6 DE	0.07	0.07	0.15	0.00
Sesgo	-14.67	0.18	-8.04	0.00
Excedente de Curtosis	406.49	2.57	265.59	0.00

De acuerdo con los resultados de la tabla, el porcentaje de datos que cae fuera del valor absoluto de una desviación estándar es de 15.78, mientras que en la normal estándar es de 31.73. Esto indica que, en promedio, los rendimientos de las acciones concentran un mayor número de datos alrededor de la media en comparación a la distribución normal. También se observa que, los rendimientos de las acciones concentran mayor cantidad de datos en los extremos, pues en promedio encontramos que hay un 0.15 por ciento de datos mayores que el valor absoluto de cinco desviaciones estándar, mientras que los datos que se



distribuyen como una normal estándar son menores al valor absoluto de cuatro desviaciones estándar. Asimismo, cabe notar que el sesgo y excedente de curtosis que registran los rendimientos de las acciones es de  $-8.04$  y  $265.59$ , respectivamente, mientras que el valor correspondiente para la normal es cero. En resumen: los rendimientos de las acciones distan mucho de comportarse como una distribución normal estándar y, más bien, presentan distribuciones leptocúrticas.

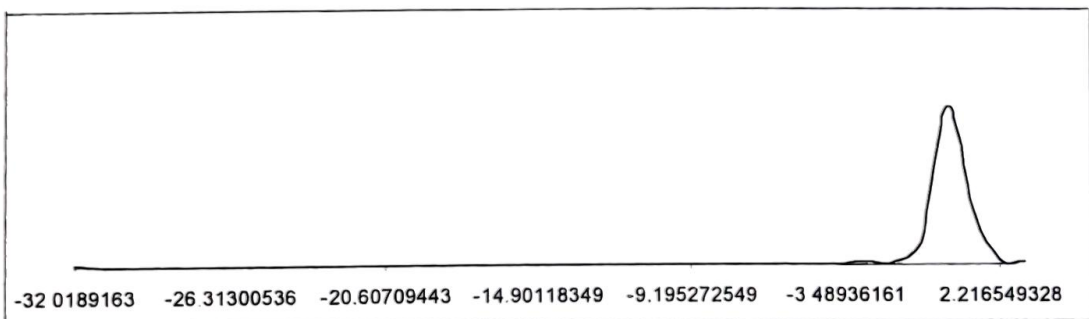
Con el fin de corregir estas distorsiones aplicamos a los rendimientos la transformación sugerida por *RiskMetrics*<sup>TM</sup> y, en concreto, las aproximaciones sugeridas por Hull y White (1998) para estimar la volatilidad de las series. Estas aproximaciones son:

Estimar la volatilidad  $\sigma$  empleando la serie completa de los rendimientos. Este modelo simplemente es llamado modelo de volatilidad constante.

Emplear un promedio móvil ponderado exponencialmente (EWMA por sus siglas en inglés)<sup>8</sup> con un parámetro o factor de decaimiento  $\lambda = 0.94$ , y 74 observaciones pasadas para estimar la volatilidad variable en el tiempo  $\sigma_t$ . Esta es la aproximación estándar de *RiskMetrics*<sup>TM</sup>. A esta aproximación se le llama modelo EWMA de *RiskMetrics*<sup>TM</sup>.

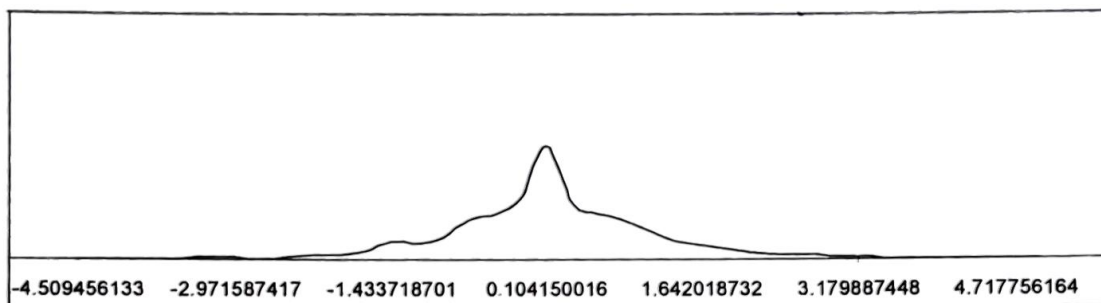
En las gráficas 3 y 4 se ilustran las distribuciones de los rendimientos de las acciones de Grupo Modelo y Apasco, respectivamente, usando el modelo de volatilidad constante.

Gráfica 3. Distribución de los rendimientos de la acción de Grupo Modelo bajo el modelo de volatilidad constante



<sup>8</sup>  $\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2$

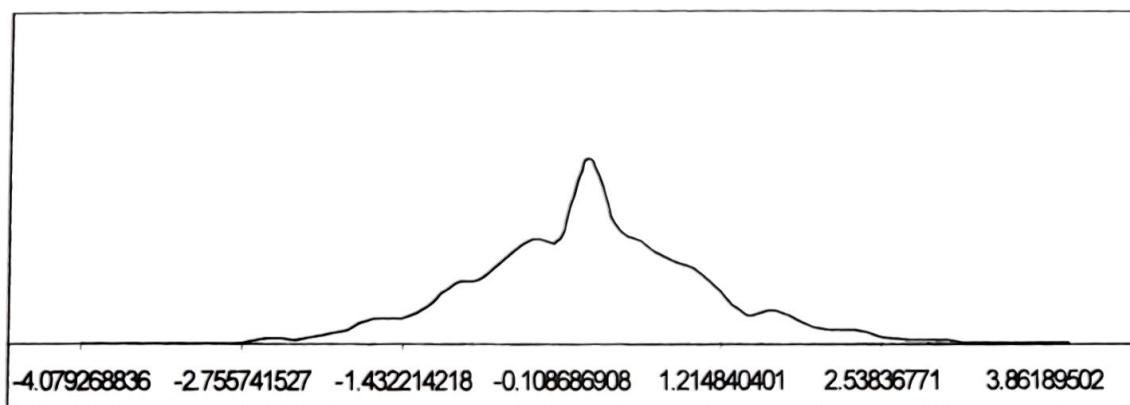
Gráfica 4. Distribución de los rendimientos de la acción de Apasco bajo el modelo de volatilidad constante



Comparando la gráfica 3 con la 1 y la gráfica 4 con la 2 notamos que son muy parecidas, de hecho, casi son iguales. Este hecho se debe a que, cuando se emplea el modelo de volatilidad constante la serie de rendimientos no experimenta una gran mejora, lo que se atribuye a que, bajo esta transformación, lo único que se consigue es que el valor de la desviación estándar sea uno, pero los valores del sesgo y del excedente de curtosis se mantienen en el mismo valor. Esto se puede observar en el apéndice.

En las gráficas 5 y 6 se ilustran las distribuciones de los rendimientos de las acciones de Grupo Modelo y Apasco respectivamente, usando el modelo EWMA de *RiskMetrics*<sup>TM</sup>.

Gráfica 5. Distribución de los rendimientos de la acción de Grupo Modelo bajo el modelo EWMA de *RiskMetrics*<sup>TM</sup>



Comparando la gráfica 5 con la 1 y la gráfica 6 con la 2 vemos que existe una notable diferencia, en tanto que las distribuciones mostradas en las gráficas 5 y 6 muestran mayor simetría.

Para evidenciar cuánto mejoran las series bajo los modelos de volatilidad constante y EWMA de *RiskMetrics*<sup>TM</sup>, calculamos el sesgo y la curtosis de las series transformadas. Estos resultados se encuentran en la tabla 2.

Gráfica 6. Distribución de los rendimientos de la acción de Apasco bajo el modelo de EWMA de *RiskMetrics*<sup>TM</sup>

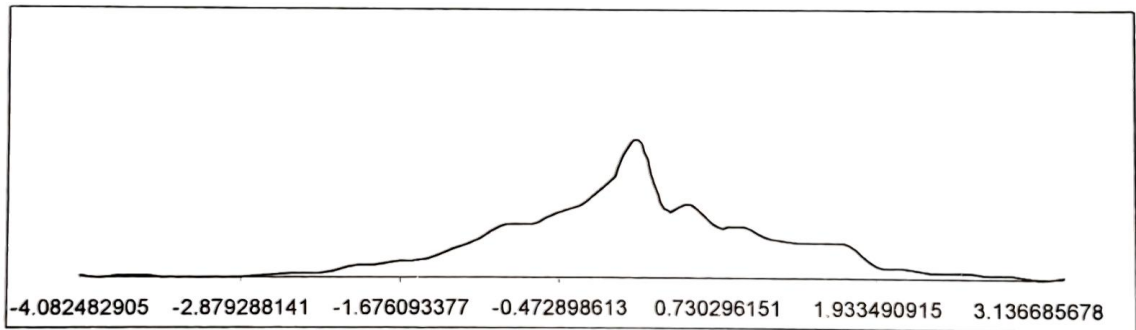


Tabla 2. Sesgo y curtosis de las series transformadas, bajo el modelo de Volatilidad constante y bajo el EWMA de *RiskMetrics*<sup>TM</sup>

	ALFA A	APAS CO	BIMBO A	CEME XCPO	FEMS AUBD	GFB BB	GMODE LOC	KIMBE RA	TELEC OMA1	TELME XL
Modelo con Volatilidad Constante										
Sesgo	0.53	0.22	-22.36	-0.10	-11.06	0.90	-22.87	-0.03	-17.83	-9.38
Excedente de Curtosis	4.88	2.35	710.18	4.86	621.4 3	9.59	731.06	4.12	502.48	187.11
Modelo con EWMA de <i>RiskMetrics</i> <sup>TM</sup>										
Sesgo	0.00	0.03	0.11	-0.07	-0.14	0.01	0.01	-0.06	-0.02	-0.06
Excedente de Curtosis	0.70	0.37	1.26	0.45	0.96	0.52	0.84	0.90	0.84	0.84



	TVAZTC ACPO	WAL MEXC	Prome dio	Normal Est
Modelo con Volatilidad Constante				
Sesgo	-14.67	0.18	-8.04	0.00
Excedente de Curtosis	406.49	2.57	265.59	0.00
Modelo con EWMA de <i>RiskMetrics</i> <sup>TM</sup>				
Sesgo	-0.01	0.04	-0.01	0.00
Excedente de Curtosis	0.78	0.63	0.76	0.00

Al confrontar la tabla uno con la tabla dos notamos que, en efecto, el valor del sesgo y la curtosis bajo el modelo de volatilidad constante se mantienen en el mismo nivel. Por otro lado, bajo el modelo EWMA de *RiskMetrics*<sup>TM</sup> las distribuciones exhiben una mejora significativa, pues, en promedio, el sesgo registra un valor de -0.01, mientras que el excedente de curtosis es de 0.76. Los valores de estos momentos para el caso de volatilidad constante son: -8.04 y 265.59, respectivamente.

No obstante, la mejora registrada bajo el modelo EWMA de *RiskMetrics*<sup>TM</sup>, el sesgo y el excedente de curtosis de la mayoría de las distribuciones de los rendimientos de las acciones, resultaron significativamente diferentes de cero.

## VI. MODELOS ALTERNATIVOS AL PROBLEMA DE NORMALIDAD

El enfoque tradicional para modelar la no normalidad en los rendimientos asume que, aún cuando los rendimientos no son normales, alguna transformación funcional de éstos sí lo es. Hull y White (1998) sostienen que, para encontrar la transformación funcional de la serie original de rendimientos es necesario establecer, antes, algunos supuestos y definiciones. Para tal efecto, consideran que hay un total de  $m$  variables de mercado y que  $r_{ij}$  y  $G_{ij}$  son, respectivamente, el rendimiento de la variable  $j$  en el día  $i$  ( $1 \leq j \leq m$ ) y la función de distribución para  $r_{ij}$ . En general, asumen que  $G_{ij}$  depende de un número de parámetros, algunos independientes de  $i$  y otros más sujetos a esquemas ac-

tualizados, similares a los GARCH.<sup>9</sup> La conversión de  $r_{ij}$  en una nueva variable  $f_{ij}$  es lograda mediante la transformación

$$f_{ij} = N^{-1}[G_{ij}(r_{ij})] \quad (14)$$

donde  $N$  es la función de distribución de una normal. La expresión dentro de los paréntesis rectangulares denota la probabilidad acumulada de que el rendimiento de la variable  $j$  en el día  $i$  sea menor que  $r_{ij}$ . Si se denota esto por  $z$ , entonces  $r_{ij}$  es el  $z$ -ésimo cuantil de la distribución supuesta para los rendimientos. La variable  $f_{ij}$  es el mismo cuantil correspondiente a la distribución normal estándar. Cuando nos movemos de  $r_{ij}$  a  $f_{ij}$  estamos mapeando observaciones de la distribución que se asume para los rendimientos en una distribución normal estándar sobre una base cuantil-cuantil.

Esta aproximación puede ser usada para calcular el VaR debido a que se considera que  $f_{ij}$  ( $1 \leq j \leq m$ ) se distribuye como una normal multivariada. El VaR puede ser calculado mediante simulación Monte Carlo o series de Taylor. Como un ejemplo particular del modelo, para escoger la función  $G$  se emplea una mezcla de distribuciones normales. Se hace énfasis en que, la forma funcional de la función  $G$  y el procedimiento de estimación son ilustraciones de la aproximación que puede seguirse.

Para entender mejor el modelo definamos  $\sigma_i^2$  como la varianza del rendimiento  $r_i$  en el día  $i$ , y supongamos que la función de densidad de los rendimientos es

$$g_i(r_i) = \frac{p}{\sqrt{2\pi u\sigma_i}} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2u^2\sigma_i^2}\right) + \frac{1-p}{\sqrt{2\pi v\sigma_i}} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2v^2\sigma_i^2}\right) \quad (15)$$

por lo tanto

$$G_i(r_i) = pN\left(\frac{r_i}{u\sigma_i}\right) + (1-p)N\left(\frac{r_i}{v\sigma_i}\right)$$

---

<sup>9</sup> GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity).

La función de densidad es un promedio ponderado de dos distribuciones normales con media cero. La primera distribución está ponderada por  $p$ , cuya desviación estándar es  $u\sigma_i$ , mientras que la segunda se pondera por  $1-p$  y su desviación estándar es  $v\sigma_i$ .

La ecuación define una familia de distribuciones en términos de cuatro parámetros:  $p$ ,  $u$ ,  $v$  y  $\sigma_i$ . La varianza de la distribución en (15) es  $pu^2\sigma_i^2 + (1-p)v^2\sigma_i^2$ .

Debido a que la expresión anterior debe ser igual a  $\sigma_i^2$ , los parámetros que definen a la distribución deben satisfacer

$$pu^2 + (1-p)v^2 = 1 \quad (16)$$

Una aproximación natural para encontrar los valores de  $p$ ,  $u$  y  $v$  que sean consistentes con (16), y que brinden una mejor aproximación a la distribución de  $r_i$ , requiere maximizar la función del logaritmo de la probabilidad.

$$\sum_i \log \left[ \frac{p}{u\sigma_i} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2u^2\sigma_i^2}\right) + \frac{1-p}{v\sigma_i} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2v^2\sigma_i^2}\right) \right] \quad (17)$$

Pero existe un problema, notado por Hamilton (1991), el hecho de maximizar la función puede producir inestabilidad, soluciones locales y falta de convergencia. Otro problema es que los valores de  $p$ ,  $u$  y  $v$  son fuertemente influenciados por valores extremos de los datos.

Para superar este problema se opta regularmente por estimar los parámetros ajustando los cuantiles de la distribución. Los datos se dividen en cuatro categorías: menores que una desviación estándar ( $|r_i| \leq \sigma_i$ ); entre una y dos desviaciones estándar ( $\sigma_i < |r_i| \leq 2\sigma_i$ ); entre dos y tres desviaciones estándar ( $2\sigma_i < |r_i| \leq 3\sigma_i$ ); y, más grandes que tres desviaciones estándar ( $3\sigma_i < |r_i|$ ).



Se compara el número de datos observados en cada categoría con el número de datos que deberían ser predichos por los valores particulares de  $p$ ,  $u$  y  $v$ , y se seleccionan los valores de los parámetros que maximicen el logaritmo de la función de probabilidad

$$\sum_{k=1}^4 \alpha_k \log(\beta_k) \quad (18)$$

donde  $\alpha_k$  es la proporción actual de las observaciones en la  $k$ -ésima categoría y  $\beta_k$  es la proporción predicha.

La probabilidad de que en un total de  $N$  observaciones  $n_i$  estén en la categoría  $i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ), es proporcional a  $\beta_1^{n_1} \beta_2^{n_2} \beta_3^{n_3} \beta_4^{n_4}$ . Tomando el logaritmo de esta función y dividiéndola por  $N$  obtenemos la función (18). Este modelo tiene la ventaja de que, al escoger adecuadamente los valores de  $p$ ,  $u$  y  $v$ , la distribución de los rendimientos resultantes está especificada por dos distribuciones normales. El inconveniente que presenta es que los valores de  $p$ ,  $u$  y  $v$  se deben obtener por iteración, esto es: el método descrito nos indica que se obtiene el número de observaciones que caen en un intervalo, y se comparan con las que deberían estar en ese mismo intervalo, en la función de mezcla de normales con determinados valores de  $p$ ,  $u$  y  $v$ . Este proceso se repite hasta que se encuentran los óptimos valores de  $p$ ,  $u$  y  $v$ , por lo que el proceso puede ser muy demandante computacionalmente hablando.

## EL MODELO HIPERBÓLICO

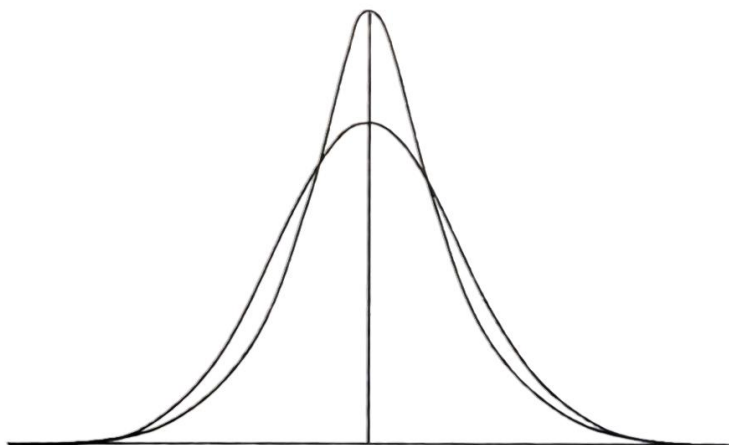
La distribución hiperbólica fue introducida por Barndorff-Nielsen (1997). El nombre de distribución hiperbólica deriva del hecho de que el logaritmo de su densidad es una hipérbola. Recuerde que el logaritmo de la densidad de una distribución normal es una parábola. Esta distribución provee la posibilidad de modelar las conocidas como “colas gordas” de las distribuciones de los rendimientos. Su densidad está dada por

$$f_{(\alpha,\beta,\delta,\mu)}(x) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)} \exp\left(-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \beta(x-\mu)\right) \quad (19)$$

donde  $K_1$  representa la función de Bessel modificada del tercer tipo con índice 1. Tiene cuatro parámetros  $\mu \in R$ ,  $\delta > 0$ ,  $0 \leq |\beta| < \alpha$ . A grandes rasgos,  $\alpha$  y  $\beta$  determinan la forma de la distribución, donde  $\beta$  es responsable del sesgo;  $\delta$  y  $\mu$  son parámetros que determinan el tamaño y la ubicación. Estos parámetros pueden ser estimados partiendo de una muestra de observaciones independientes a través de métodos de máxima verosimilitud.<sup>10</sup>

En Eberlein y Keller (1995), la distribución hiperbólica mostró que provee una excelente estimación para los rendimientos del stock Alemán. En la figura 3 se ilustra una distribución normal con una distribución hiperbólica.

Figura 3. Comparación de una distribución normal con un distribución hiperbólica.



Como consecuencia de las características de la distribución hiperbólica se desprende una aplicación inmediata que se encuentra en el cálculo del Valor en

<sup>10</sup> Ver Blæsild y Sørensen (1992).

Riesgo. Para valuar el riesgo mediante este modelo se toma una valuación total de las posibles pérdidas del portafolio. Para ver esto con más detenimiento, consideremos un portafolio que consiste de una opción *call*<sup>11</sup> en una posición corta. Entonces el VaR se define como

$$VaR = C(S_h, K, T - h, r) - C(S_0, K, T, r) \quad (20)$$

donde  $S_h$  es determinado por el cuantil que nos denota el 95% y  $h$  es el periodo de exposición. Note que la opción tiene una posición corta, por lo tanto, el valor del portafolio cae cuando el valor de la opción aumenta.

Para el modelo de Black-Scholes (1973), obtenemos lo siguiente. Denote por  $q_a$  el cuantil  $a$  de la distribución normal estándar; entonces tenemos

$$S_h = S_0 \exp(\sigma\sqrt{h}q_a + (r - \sigma^2/2)h) \quad (21)$$

Para el modelo hiperbólico  $S_t = S_0 e^{X_t}$  obtenemos simplemente

$$S_h = S_0 \exp(qhyp_h(a)) \quad (22)$$

donde  $qhyp_h(a)$  es el cuantil  $a$  de la distribución de  $X_h$  que surge de la distribución hiperbólica estimada por convolución.

Este modelo describe mejor que una distribución normal estándar las colas gordas que presentan las distribuciones de rendimientos de las variables de mercado, sin embargo presenta el inconveniente de que los parámetros que describen la distribución hiperbólica se localizan a través de cálculos de máxima verosimilitud, lo que puede ser computacionalmente muy demandante. Además, si se intenta encontrar el cuantil requerido para el cálculo del Valor en

---

<sup>11</sup> El titular de una opción Call adquiere el derecho para comprar un activo subyacente a un determinado precio (precio de ejercicio) en cualquier momento previo al día del vencimiento y a cambio del pago de una prima.



Riesgo en la distribución hiperbólica, es necesaria una estimación por convolución.

## LA APROXIMACIÓN DE ESTIMACIÓN DE FUNCIONES

Supongamos que tenemos una variable aleatoria  $X$  de la cual su media, varianza, sesgo y excedente de curtosis se definen como sigue:

$$\begin{aligned}\mu &= E(X), \\ \sigma^2 &= Var(X), \\ \gamma_1 &= \frac{E(X - \mu)^3}{\sigma^3}, \\ \gamma_2 &= \frac{E(X - \mu)^4}{\sigma^4} - 3.\end{aligned}\tag{23}$$

Se considera una muestra de la distribución de  $X$  usando la teoría de estimación de funciones en estadística.<sup>12</sup> De los dos primeros momentos en (23) tenemos dos estimadores de funciones:

$$\begin{aligned}h_1 &= X - \mu, \\ h_2 &= (X - \mu)^2 - \sigma^2.\end{aligned}$$

Pero  $h_1$  y  $h_2$  no son ortogonales entre sí. Adoptamos el procedimiento de ortogonalización en Doob (1953) para producir el estimador de una función ortogonal a  $h_1$

$$h_3 = (X - \mu)^2 - \sigma^2 - \gamma_1 \sigma (X - \mu).$$

---

<sup>12</sup> Para los conceptos básicos de esta teoría ver Godambe (1991).

Entonces, necesitamos encontrar una combinación lineal óptima de los estimadores de funciones  $h_1$  y  $h_3$  como a continuación se muestra:

$$l_\mu = \alpha h_1 + \beta h_3.$$

Godambe y Thomson (1989), basados en la teoría de estimación de funciones, muestran que los coeficientes óptimos  $\alpha$  y  $\beta$  están dados como sigue

$$\alpha^* = \frac{E\left(\frac{\partial h_1}{\partial \mu}\right)}{E(h_1^2)} = -\frac{1}{\sigma^2},$$

$$\beta^* = \frac{E\left(\frac{\partial h_3}{\partial \mu}\right)}{E(h_3^2)} = -\frac{\gamma_1 \sigma}{\sigma^4(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2)}.$$

En general,  $\frac{l_\mu^*}{\sqrt{\text{Var}(l_\mu^*)}}$  puede ser aproximado por una distribución normal estándar. Por lo tanto, un intervalo de confianza de  $(1 - \alpha)$  por ciento para

$\frac{l_\mu^*}{\sqrt{\text{Var}(l_\mu^*)}}$  será

$$\left| \frac{l_\mu^*}{\sqrt{\text{Var}(l_\mu^*)}} \right| < C_\alpha, \quad (24)$$

donde  $C_\alpha$  es el valor crítico correspondiente al nivel de confianza  $\alpha$ . Por ejemplo, si  $\alpha = 0.05$ ,  $C_\alpha = 1.96$ . La desigualdad (24) se puede resolver para un intervalo de confianza de  $X$  si todos los momentos son conocidos, es decir  $X_L < X < X_U$ .

Después de algunas derivaciones matemáticas se llega a los siguientes resultados

$$X_U = \mu + \frac{\frac{\gamma_2 + 2}{\gamma_1} + \sqrt{\left(\frac{\gamma_2 + 2}{\gamma_1}\right)^2 + 4 \left[ \frac{C_\alpha \sqrt{(\gamma_2 + 2)(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2)}}{|\gamma_1|} + 1 \right]}}{2} \sigma, \quad (25)$$

$$X_L = \mu + \frac{\frac{\gamma_2 + 2}{\gamma_1} - \sqrt{\left(\frac{\gamma_2 + 2}{\gamma_1}\right)^2 + 4 \left[ \frac{C_\alpha \sqrt{(\gamma_2 + 2)(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2)}}{|\gamma_1|} + 1 \right]}}{2} \sigma, \quad \gamma_1 \neq 0$$

En el caso de la distribución normal

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0,$$

el estimador óptimo de la función es:

$$l_\mu^* = -\frac{X - \mu}{\sigma^2} \text{ y } \left| \frac{l_\mu^*}{\sqrt{\text{Var}(l_\mu^*)}} \right| = \left| \frac{X - \mu}{\sigma} \right|.$$

En este caso, la aproximación encontrada nos lleva al mismo intervalo de confianza construido bajo la suposición de una distribución normal.

Es importante notar que, el tamaño del intervalo de confianza cambia cuando cambian los momentos de las variables. El tamaño del intervalo de confianza se define como la diferencia del límite superior menos el límite inferior, es decir

$$L = X_U - X_L.$$

Bajo la aproximación de estimación de funciones tenemos

$$L = \sqrt{\left(\frac{\gamma_2 + 2}{\gamma_1}\right)^2 + 4 \left[ \frac{C_\alpha \sqrt{(\gamma_2 + 2)(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2)}}{|\gamma_1|} + 1 \right]} \sigma, \quad \gamma_1 \neq 0. \quad (26)$$



En el caso especial de la distribución normal tenemos  $L = 2C_{\alpha}\sigma$ .

Para dar una idea más intuitiva del modelo se calcularon los límites superior e inferior de los rendimientos de las doce acciones. En las tablas 3 y 4 se encuentran los resultados encontrados bajo el modelo de volatilidad constante y del EWMA de *RiskMetrics™*, respectivamente.

En cada uno de los casos hay tres líneas de datos de las cuales la primera, corresponde al límite inferior, la segunda línea al límite superior y, finalmente, la tercera nos indica el tamaño del intervalo.<sup>13</sup> En la última columna se presentan los mismos datos para cuando tenemos una distribución normal estándar. Se observa que, para todos los casos, la longitud de los intervalos que se obtienen bajo la estimación de funciones es considerablemente mayor que la obtenida bajo la distribución normal.

Tabla 3. Límites cuando se usa el modelo de volatilidad constante

ALFA A	APA SCO	BIMB OA	CEME XCPO	FEMS AUBD	GFB BB	GMOD ELOC	KIMBER A	TELEC OMA1	TELM EXL	TVAZTC ACPO	WALM EXC	Norm al Est
$\alpha = 0.05$												
-1.78	-1.82	-32.94	-68.74	-58.08	-1.72	-33.12	-199.74	-29.48	-21.56	-29.19	-1.85	-1.96
14.83	21.36	1.04	1.93	1.72	14.63	1.03	1.94	1.16	1.38	1.29	27.64	1.96
16.60	23.18	33.98	70.67	59.80	16.36	34.15	201.68	30.64	22.94	30.48	29.49	3.92
$\alpha = 0.03$												
-1.94	-1.99	-33.04	-68.93	-58.26	-1.88	-33.23	-199.95	-29.60	-21.69	-29.32	-2.03	-2.17
14.99	21.53	1.15	2.13	1.89	14.79	1.14	2.14	1.28	1.51	1.42	27.82	2.77
16.92	23.52	34.19	71.06	60.16	16.67	34.36	202.09	30.88	23.21	30.74	29.85	4.94
$\alpha = 0.01$												
-2.24	-2.32	-33.25	-69.31	-58.60	-2.18	-33.43	-200.34	-29.82	-21.95	-29.57	-2.37	-2.58
15.29	21.86	1.35	2.51	2.23	15.09	1.34	2.54	1.51	1.77	1.67	28.17	2.58
17.53	24.18	34.60	71.82	60.83	17.27	34.76	202.88	31.33	23.72	31.24	30.54	5.15

<sup>13</sup> En las tablas 3, 4, 5 y 6 se tomaron tres niveles de significancia,  $\alpha = 0.05$ ,  $\alpha = 0.03$  y  $\alpha = 0.01$ .

Tabla 4. Límites cuando se usa el modelo de EWMA de *RiskMetrics*<sup>TM</sup>

ALFAA	APA SCO	BIMB OA	CEME XCPO	FEMS AUBD	GFBB B	GMOD ELOC	KIMBE RA	TELEC OMA1	TELM EXL	TVAZTC ACPO	WALM EXC	Norm al Est
$\alpha = 0.05$												
-1.92	-1.85	-1.77	-34.66	-21.78	-1.88	-1.85	-50.84	-166.42	-46.99	-256.32	-1.85	-1.96
572.99	70.87	28.82	1.83	1.73	191.23	224.30	1.83	1.85	1.80	1.81	60.19	1.96
574.91	72.72	30.59	36.49	23.51	193.12	226.15	52.67	168.27	48.80	258.13	62.04	3.92
$\alpha = 0.03$												
-2.12	-2.04	-1.94	-34.84	-21.95	-2.08	-2.05	-51.03	-166.61	-47.18	-256.52	-2.05	-2.17
573.19	71.06	28.99	2.02	1.90	191.43	224.50	2.01	2.05	1.99	2.01	60.38	2.77
575.32	73.11	30.94	36.86	23.84	193.52	226.55	53.04	168.66	49.16	258.52	62.42	4.94
$\alpha = 0.01$												
-2.51	-2.41	-2.27	-35.19	-22.26	-2.47	-2.43	-51.38	-166.99	-47.52	-256.89	-2.41	-2.58
573.58	71.43	29.32	2.36	2.21	191.82	224.88	2.37	2.42	2.34	2.38	60.74	2.58
576.10	73.84	31.60	37.55	24.47	194.29	227.30	53.75	169.40	49.86	259.28	63.15	5.15

A continuación calculamos el porcentaje de las observaciones que caen fuera del intervalo y lo comparamos con el nivel de significancia. Los resultados se presentan en las tablas 5 y 6. Para cada nivel de significancia, el primer renglón nos indica el porcentaje de observaciones fuera del intervalo cuando se asume normalidad, en el segundo se obtiene lo mismo, pero bajo la aproximación de estimación de funciones.

Tabla 5. Resultados cuando se emplea el modelo de volatilidad constante

ALFAA	APA SCO	BIMB BOA	CEME XCPO	FEMS AUBD	GFBB BB	GMOD ELOC	KIMB ERA	TELEC OMA1	TELM EXL	TVAZTC ACPO	WAL MEXC
$\alpha = 0.05$											
5.38	5.73	0.70	5.31	0.28	4.62	0.56	6.43	0.91	1.96	1.68	5.73
3.29	3.22	3.57	3.22	0.14	3.71	0.03	3.50	2.73	3.36	3.22	2.73
$\alpha = 0.03$											
4.34	4.27	0.42	3.92	0.21	3.50	0.00	4.83	0.70	1.33	1.33	4.27
2.59	2.31	2.66	2.66	0.14	3.08	0.03	2.52	2.03	2.73	2.52	2.17
$\alpha = 0.01$											
2.59	2.73	0.21	2.52	0.21	2.52	0.00	2.52	0.42	0.70	0.70	2.52
1.89	1.40	1.68	1.68	0.14	1.75	0.01	1.19	1.26	1.82	1.54	1.26



Tabla 6. Resultados cuando se usa el modelo de EWMA de *RiskMetrics*<sup>TM</sup>

ALF AA	APA SCO	BIM BOA	CEME XCPO	FEMS AUBD	GFB BB	GMOD ELOC	KIMB ERA	TELEC OMA1	TELM EXL	TVAZTC ACPO	WAL MEXC
$\alpha = 0.05$											
4.76	4.97	4.97	4.69	4.13	4.55	4.76	5.38	4.27	5.31	4.20	4.83
2.59	3.15	3.57	3.29	3.22	3.01	2.45	3.64	2.80	3.78	2.80	2.59
$\alpha = 0.03$											
3.36	2.59	3.36	2.73	2.45	3.29	2.73	3.92	2.59	3.36	2.80	3.29
1.61	1.89	2.59	2.52	2.10	1.96	1.68	2.38	1.75	3.15	1.68	1.68
$\alpha = 0.01$											
1.47	0.98	1.33	1.19	1.05	1.05	1.12	1.40	0.77	0.91	1.12	1.19
0.70	0.56	1.05	0.70	0.70	0.42	0.70	1.19	0.70	0.98	0.70	0.70

De la tabla 5, se observa que, cuando se emplea el modelo de volatilidad constante a un nivel de significancia de cinco por ciento, sólo cinco de las doce acciones presentan una subestimación bajo la suposición de normalidad, pues sólo en cinco casos el número de observaciones fuera del intervalo de confianza es mayor al cinco por ciento. De hecho, para los rendimientos de las acciones BIMBOA, TELECOMA1, TELMEXL, TVAZTCACPO, hay una mejor estimación de los intervalos cuando se supone normalidad que con la aproximación de estimación de funciones. Este resultado es inesperado pues, en general, la longitud de los intervalos de confianza estimados con el enfoque de estimación de funciones, son mucho mayores que los intervalos de confianza bajo el supuesto de normalidad. Empleando este mismo modelo, bajo los niveles de significancia de tres y uno por ciento, se encuentran resultados similares.

En la tabla 6, cuando usamos el método de EWMA de *RiskMetrics*<sup>TM</sup> se obtiene que, para el cinco por ciento de significancia, sólo las acciones KIMBERA y TELMEXL sobrepasan este nivel de significancia bajo el supuesto de normalidad. Para un nivel de significancia de tres por ciento sólo seis de las doce acciones sobrepasan este nivel, y para cuando el nivel de significancia es igual a uno por ciento nueve de las doce acciones lo sobrepasan.



Al tomar la aproximación de estimación de funciones, ninguna acción sobrepasa el nivel de significancia del 5%, una acción cuando el nivel es del tres por ciento y dos acciones cuando el nivel es del uno por ciento.<sup>14</sup> No es extraño que con este método el porcentaje de observaciones que caen fuera del intervalo de confianza sea menor que el que asume normalidad, pues, en el primer caso la longitud de los intervalos es considerablemente mayor que la obtenida en el segundo caso.

Bajo la estructura general de *RiskMetrics*<sup>TM</sup> este modelo puede ser adaptado para calcular el VaR fácilmente. Se puede adoptar una expansión en series de Taylor o una simulación Monte Carlo, dado que los momentos pueden ser calculados bajo estos métodos. Entonces podemos usar la desviación estándar, sesgo y curtosis obtenidas para construir un intervalo de confianza aproximado.

Para finalizar, el cuadro 1 resume las propiedades de los modelos sugeridos cuando no hay normalidad en los rendimientos.

## VII. CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados obtenidos, se puede concluir que:

- i. Al traducir la distribución general  $f(w)$ , que describe los rendimientos de una acción en una distribución normal estándar  $\Phi(\varepsilon)$ , como se hace en la ecuación (5), se está asumiendo implícitamente que la distribución general sigue una distribución normal no estándar, lo cual no siempre es cierto. Esto se puede fácilmente comprobar al observar las gráficas de las distribuciones de los rendimientos de las acciones.
- ii. La mayoría de los modelos que se emplean para calcular el valor en riesgo suponen, por simplicidad, que los rendimientos de las variables de mercado

---

<sup>14</sup> David Li (1999) encuentra que el método de estimación de funciones captura mejor los datos que la distribución normal, cuando se toman los rendimientos de los precios de doce divisas.

Cuadro 1.- Resumen de los modelos que asumen no normalidad en los rendimientos

Modelos	Ventajas	Desventajas
Mezcla de Normales	El hecho de que el modelo esté compuesto por dos distribuciones normales, permite aprovechar las propiedades de dicha distribución para facilitar el cálculo del VaR.	Los parámetros que definen la distribución de mezcla de normales ( $p$ , $u$ y $v$ ) se obtienen por iteración, proceso que puede ser muy demandante computacionalmente hablando.
Modelo hiperbólico	Brinda la posibilidad de modelar las conocidas como «colas gordas» de las distribuciones de rendimientos. Esto a su vez, permite emplear dicha distribución para calcular el VaR.	Los cálculos para encontrar los parámetros que describen la distribución hiperbólica pueden ser computacionalmente muy demandantes. Además, el proceso para encontrar el cuantil requerido en el cálculo del VaR, implica una estimación por convolución.
Estimación de funciones	Este modelo capta las observaciones extremas mucho mejor que la distribución normal, por ello, brinda una posibilidad más para calcular el VaR.	El modelo no muestra desventajas significativas.

se comportan como una distribución normal, supuesto que no se cumple para los rendimientos de las doce acciones trabajadas.

- iii. Los rendimientos de las acciones trabajadas muestran ser sesgadas. De hecho, en algunos casos el sesgo es muy grande en valor absoluto. También muestran

ser muy leptocurticas puesto que, para algunas acciones, los valores del excedente de curtosis son superiores a 700.

- iv. Al aplicar la transformación, sugerida por *RiskMetrics*<sup>TM</sup>, a los rendimientos de las acciones bajo el modelo de volatilidad constante, no se obtiene una mejora significativa, pues lo único que se consigue es que el valor de la varianza sea uno, pero los valores del sesgo y del excedente de curtosis se mantienen en el mismo nivel.
- v. Al transformar los rendimientos de las acciones bajo el modelo de EWMA de *RiskMetrics*<sup>TM</sup> se encuentra una mejora significativa en las distribuciones de los rendimientos, no obstante, el sesgo y el excedente de curtosis de la mayoría de las distribuciones de los rendimientos de las acciones son significativamente diferentes de cero.
- vi. El modelo de mezcla de normales que se propone para corregir la no normalidad de los rendimientos de las acciones tiene la ventaja de estar compuesto por dos distribuciones normales, mismas que simplifican los cálculos. El inconveniente que presenta es que puede ser muy demandante computacionalmente hablando.
- vii. El modelo hiperbólico, a pesar de describir muy bien las “colas gordas” que presentan las distribuciones de los rendimientos de las variables de mercado, tiene cierta dificultad para encontrar los parámetros que describen la distribución y el cuantil requerido para calcular el VaR, pues puede ser muy demandante en términos computacionales.
- viii. El método de estimación de funciones, cuando se utiliza el modelo de volatilidad constante, tiene algunos inconvenientes pues, en algunos casos, la distribución normal capta mejor los datos. Esto se debe a que, como se dijo, las series de los rendimientos bajo el modelo de volatilidad constante no mejoran.
- ix. El método de estimación de funciones, cuando se emplea el modelo EWMA de *RiskMetrics*<sup>TM</sup>, captura mejor los casos extremos que la distribución normal. Además, por ser semiparamétrico, este método es computacionalmente poco demandante.

Debido a las características que presentan las distribuciones de los rendimientos de las variables de mercado, se deja como sugerencia estimar las distribu-



ciones de los rendimientos partiendo de la estimación de funciones que propone B. W. Silverman.<sup>15</sup> De este modo, se podrán hacer estimaciones de valor en riesgo partiendo de la distribución empírica, y se podrán comparar con los modelos propuestos así como con el modelo que asume normalidad.

## BIBLIOGRAFÍA

- Campbell, Lo and Mackinlay, 1997. *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press. Princeton, New Jersey, USA.
- Johnston. J. and Dinardo J. 1997. *Econometric Methods*, McGraw Hill, Fourth Edition, Singapore.
- Eberlein, E., Keller, U., Prause, K., (1998). "New Insights into Smile, Mispricing, and Value at Risk: The Hyperbolic Model", *Journal of Business*, 1998, vol. 71, no. 3.
- Hull, J. and White A., (1998). "Value at Risk When Daily Changes in Market Variables are not Normally Distributed", *Journal of Derivatives*, No. 3, Spring 1998, pp. 9-19.
- Hull, J., (2000). *Options, Futures, and Other Derivatives*, Fourth Edition, Prentice Hall.
- Jorion, P., (1997). "Value at Risk: the New Benchmark for Controlling Risk", Richard D. Irwin.
- J. P. Morgan (1996). "RiskMetrics, Technical Documentation". Reuters/J. P. Morgan, Fourth Edition. N. Y.
- Kupiec, P. (1995). "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models", *Journal of Derivatives*, 3, 73-84.
- Li, D., (1999). "Value at Risk Based on the Volatility, Skewness and Kurtosis", Risk Metrics Group, New York.
- Ramírez J.C. "Los problemas más comunes en el pronóstico de rendimientos de activos financieros con distribuciones no normales". CIDE, DTE # 204.

---

<sup>15</sup> B. W. Silverman, "Density Estimation for Statistics and Data Analysis". Monographs on Applied Probability, London.